que pueden escribirse así,

$$\begin{cases} \frac{3}{2}D' - E' + F' = -1, \\ 5E' + F' = -25, \\ 6D' + 7E' - F' = 49. \end{cases}$$

La solución de este sistema de tres ecuaciones nos da

$$D' = 8, \quad E' = -2, \quad F' = -15.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (8), obtenemos

$$y^2 + 8x - 2y - 15 = 0.$$

que es la ecuación de la parábola que se buscaba.

El estudiante debe dibujar la figura para este ejemplo y verificar el hecho de que las coordenadas de cada uno de los tres puntos dados satisfacen la ecuación de la parábola. También debe obtener la misma ecuación usando la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h).$$

EJERCICIOS. Grupo 24

Dibujar para cada ejercicio la figura correspondiente.

1. Deducir y discutir la ecuación ordinaria $(x - h)^2 = 4p(y - k)$.

2. Por transformación de coordenadas, reducir las dos formas de la segunda ecuación ordinaria a las dos formas correspondientes de la primera ecuación ordinaria de la parábola.

3. Demostrar que si se tiene la ecuación de la parábola en la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, las coordenadas de su foco son $(h + p, k)$, y la ecuación de su directriz es $x = h - p$.

4. Demostrar que si se tiene la ecuación de una parábola en la forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, las coordenadas de su foco son $(h, k + p)$, y la ecuación de su directriz es $y = k - p$.

5. Por medio de la primera ecuación ordinaria, deducir la siguiente propiedad geométrica de la parábola: Si desde un punto cualquiera de una parábola se baja una perpendicular a su eje, el cuadrado de la longitud de esta perpendicular es igual al producto de las longitudes de su lado recto y del segmento del eje comprendido entre el pie de dicha perpendicular y el vértice. Toda parábola, cualquiera que sea su posición relativa a los ejes coordenados, posee esta propiedad geométrica llamada *propiedad intrínseca* de la parábola.

6. Por medio de la propiedad intrínseca de la parábola, establecida en el ejercicio 5, deducir las dos formas de la segunda ecuación ordinaria de dicha curva.

7. Hallar la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos $(-4, 3)$ y $(-1, 3)$, respectivamente. Hallar también las ecuaciones de su directriz y su eje.

8. Hallar la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos $(3, 3)$ y $(3, 1)$, respectivamente. Hallar también la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

9. La directriz de una parábola es la recta $y - 1 = 0$, y su foco es el punto $(4, -3)$. Hallar la ecuación de la parábola por dos métodos diferentes.

10. La directriz de una parábola es la recta $x + 5 = 0$, y su vértice es el punto $(0, 3)$. Hallar la ecuación de la parábola por dos métodos diferentes.

En cada uno de los ejercicios 11-15, redúzcase la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la ecuación de la parábola, y hallar las coordenadas del vértice y del foco, las ecuaciones de la directriz y eje, y la longitud del lado recto.

11. $4y^2 - 48x - 20y = 71$.

12. $9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0$.

13. $y^2 + 4x = 7$.

14. $4x^2 + 48y + 12x = 159$.

15. $y = ax^2 + bx + c$.

16. Resolver el ejemplo 2 del Artículo 56 trasladando los ejes coordenados.

17. Resolver el ejercicio 14 trasladando los ejes coordenados.

18. Discutir la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ cuando $A = E = F = 0$ y $C \neq 0$, $D \neq 0$.

19. Resolver el ejemplo 3 del Artículo 56 tomando la ecuación en la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$.

20. Hallar las coordenadas del foco y el vértice, las ecuaciones de la directriz y el eje, y la longitud del lado recto de la parábola del ejemplo 3 del Artículo 56.

21. Determinar la ecuación de la familia de parábolas que tienen un foco común $(3, 4)$ y un eje común paralelo al eje Y.

22. La ecuación de una familia de parábolas es $y = 4x^2 + 4x + c$. Discutir cómo varía el lugar geométrico cuando se hace variar el valor del parámetro c.

23. La ecuación de una familia de parábolas es $y = ax^2 + bx$. Hállese la ecuación del elemento de la familia que pasa por los dos puntos $(2, 8)$ y $(-1, 5)$.

24. Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los tres puntos $(0, 0)$, $(8, -4)$ y $(3, 1)$.

25. Hallar la ecuación de la parábola de vértice el punto $(4, -1)$, eje la recta $y + 1 = 0$ y que pasa por el punto $(3, -3)$.

26. Demostrar, analíticamente, que cualquier recta paralela al eje de una parábola corta a ésta en uno y solamente en un punto.

27. Demostrar que la longitud del radio vector de cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la parábola $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ es igual a $|x_1 - h + p|$.

28. Hallar la longitud del radio vector del punto de la parábola

$$y^2 + 4x + 2y - 19 = 0$$

cuya ordenada es igual a 3.

29. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $x + 3 = 0$ es siempre 2 unidades mayor que su distancia del punto $(1, 1)$.

30. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del centro de una circunferencia que es siempre tangente a la recta $y - 1 = 0$ y a la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 9.$$